причем
$$d[A_2, A_1+A_4] = (\omega_1^1+\omega_2^2)[A_2, A_1+A_4]$$

следовательно, (A_2) -прямая линия.

Фокусы sA_1+tA_2 луча A_1A_4 прямолинейной конгруэнции (A_1A_4) определяются уравнением:
$$s(s-t)=0.$$

Координаты точки A_1+A_4 удовлетворяют этому уравнению, следовательно, она действительно является фокусом луча рассматриваемой конгруэнции.

5) Доказательство аналогичное предыдущему.

6) Условия расслоения имеют вид:
$$\omega_3^2\wedge\omega_2^1=0,\quad \omega_1^2\wedge\omega_2^3=0,\quad \omega_1^2\wedge\omega_2^1-\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0.$$

В силу системы (I9) они удовлетворяются, что и доказывает теорему.

Литература

1. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 3, 1973, 41-49.

2. Фиников С.П., Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева. Уч. записки МГПИ, 16, вып. 3, 1951, 235-260.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Г.П. Ткач

АФФИННО РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается пара Q конгруэнций (F_1) и (F_2) парабол F_1, F_2, плоскости которых пересекаются по линии ℓ, не являющейся диаметром параболы F_i $(i=1,2)$. Построен канонический репер пары Q, исследованы аффинно расслояемые пары Q и некоторые их подклассы.

§1. Канонический репер пары Q.

Пусть d_i -диаметр параболы F_i, проходящей через ту её точку, в которой касательная к параболе параллельна прямой ℓ, K_i -точка пересечения диаметра d_i с прямой ℓ.

Отнесем пару Q к каноническому реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$, где вектор $\bar e_3$ направлен по прямой ℓ, вектор $\bar e_i$ -параллелен диаметру d_i параболы F_i, вершина A канонического репера является серединой отрезка K_1K_2 и векторы $\bar e_\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$ пронормированы так, что уравнения параболы F_i имеют вид:
$$(x^3)^2-2x^i+2a_i^3x^3+a_i^0=0,\quad x^j=0, \tag{1.1}$$
причем
$$a_1^3+a_2^3=0. \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$, по индексам i и j суммирование не производится. Выбирая формы ω^1, ω^2 за независимые первичные формы пары Q и тем самым исключая случай вырождения поверхности (A) и параллельности прямой ℓ касательной плоскости к поверхности (A) в точке A, запишем систему пфаффовых уравнений пары Q в виде:

$$\omega_j^i = \Gamma^i_{jk}\omega^k, \quad \omega_3^i = \Gamma^i_{3k}\omega^k, \quad \omega_i^3 = -\lambda_{ik}\omega^k, \tag{1.3}$$

$$\Delta a_i = a_{ik}\omega^k, \quad \Delta a_i^3 = a^3_{ik}\omega^k, \quad \Delta a_i^0 = a^0_{ik}\omega^k,$$

где

$$\Delta a_{ik} = \omega_i^i - 2\omega_3^3 - a_i^3\omega_i^3,$$

$$\Delta a^3_{ik} = da_i^3 + a_i^3\omega_3^3 - \omega^3, \tag{1.4}$$

$$\Delta a^0_{ik} = \frac{1}{2}da_i^0 + a_i^0\omega_3^3 - a_i^3\omega^3.$$

Из (1.3) следует, что пары Q определяются с произволом двенадцати функций двух аргументов.

§2. Аффинно расслояемые пары Q.

Обозначим буквой Π_α плоскость, определяемую уравнением $x^\alpha = 0$ $(\alpha = 1,2,3)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пара Q называется аффинно расслояемой, если существуют односторонние аффинные расслоения [1] от конгруэнций $(F_1), (F_2)$ и прямолинейной конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (Π_3) плоскостей Π_3.

Т е о р е м а 1. Аффинно расслояемые пары Q существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия одностороннего аффинного расслоения от конгруэнций (F_i) $(i=1,2)$ и прямолинейной конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (Π_3) запишутся в виде:

$$(\omega_i^i - 2\omega_3^3)\wedge\omega_i^3 + \omega_i^j\wedge\omega_j^3 = 0,$$

$$\Delta a_i^0\wedge\omega_i^3 + \omega^1\wedge\omega_1^3 + \omega^2\wedge\omega_2^3 = 0, \tag{2.1}$$

$$\Delta a_i^3\wedge\omega_i^3 + \omega_3^1\wedge\omega_1^3 + \omega_3^2\wedge\omega_2^3 = 0,$$

$$\omega^1\wedge\omega_1^3 + \omega^2\wedge\omega_2^2 = 0,$$

$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3 + \omega_3^2\wedge\omega_2^3 = 0. \tag{2.2}$$

Системы квадратичных уравнений (2.1),(22) приводятся к виду

$$\omega^1\wedge\omega_1^3 + \omega^2\wedge\omega_2^3 = 0,$$

$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3 + \omega_3^2\wedge\omega_2^3 = 0,$$

$$(\omega_i^i - 2\omega_3^3)\wedge\omega_i^3 + \omega_i^j\wedge\omega_j^3 = 0, \tag{2.3}$$

$$\Delta a_i^0\wedge\omega_i^3 = 0,$$

$$\Delta a_i^3\wedge\omega_i^3 = 0,$$

Учитывая (I.3), имеем:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{12} - \lambda_{21} = 0,\\
&(\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{32})\lambda_{12} - \Gamma^1_{32}\lambda_{11} + \Gamma^2_{31}\lambda_{22} = 0,\\
&(a_{ii} - \Gamma^j_{ij})\lambda_{ij} - a_{ij}\lambda_{ii} + \Gamma^j_{ii}\lambda_{jj} = 0, \qquad (2.4)\\
&a^0_{ii}\lambda_{ij} - a^0_{ij}\lambda_{ii} = 0,\\
&a^3_{ii}\lambda_{ij} - a^3_{ij}\lambda_{ii} = 0.
\end{aligned}
$$

Анализируя (I.3),(2.4), убеждаемся, что аффинно расслояемые пары Q существуют с произволом четырех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Если точка A аффинно расслояемой пары Q инцидентна диаметрам d_i парабол F_i, то плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка A инцидентна диаметрам d_i парабол F_i, то уравнения (I.I) принимают вид:

$$(x^3)^2 - 2x^i + a^0_i = 0, \quad x^j = 0, \qquad (2.5)$$

то есть

$$a^3_i = 0.$$

Из последних двух уравнений системы (2.3), получаем:

$$\omega^3 \wedge \omega^3_1 = 0, \quad \omega^3 \wedge \omega^3_2 = 0 \qquad (2.6)$$

Так как плоскости Π_3 пары Q образуют двупараметрическое семейство и имеют место уравнения (2.6), то

$$\omega^3 = 0. \qquad (2.7)$$

Значит, плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A) в точке A.

Т е о р е м а 3. Если точка A инцидентна параболам F_i аффинно расслояемой пары Q и точки K_1 и K_2 - различны, то плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка A инцидентна параболам F_1 и F_2, тогда

$$a^0_i = 0.$$

Из уравнений

$$\Delta a^0_i \wedge \omega^3_i = 0 \qquad (2.8)$$

системы (2.3), имеем:

$$a^3_1\omega^3 \wedge \omega^3_1 = 0, \quad a^3_2\omega^3 \wedge \omega^3_2 = 0 \qquad (2.9)$$

Так как точки K_1 и K_2 не совпадают, то

$$a^3_i \neq 0.$$

Учитывая, что плоскости Π_3 образуют двупараметрическое семейство, из (2.9) получаем:

$$\omega^3 = 0.$$

Следовательно, плоскость Π_3 является касательной плоскостью к поверхности (A) в точке A.

Обозначим буквой A_α конец вектора $\bar e_\alpha$:

$$\bar A_\alpha = \bar A + \bar e_\alpha. \qquad (2.10)$$

§3. Пары Q^*.

О п р е д е л е н и е 2. Парой Q^* называется аффинно расслояемая пара Q, удовлетворяющая следующим условиям:

1.Точка A инцидентна диаметрам d_i парабол F_i,

2.Точка A_1 принадлежит характеристическому подпространству плоскости параболы F_1,

3.Касательные плоскости к поверхностям (A) и (A_3) параллельны,

4.Одно семейство асимптотических линий этих поверхностей соответствует,

5.Координатная сеть на поверхности (A) является асимптотической.

Т е о р е м а 4. Пары Q^* существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$d\bar{A} = \omega^1 \bar{e}_1 + \omega^2 \bar{e}_2 + \omega^3 \bar{e}_3 ,$$

$$d\bar{A}_3 = (\omega^1 + \omega^1_3)\bar{e}_1 + (\omega^2 + \omega^2_3)\bar{e}_2 + (\omega^3 + \omega^3_3)\bar{e}_3 ,$$

и имеет место уравнение (2.7), то условия параллельности касательных плоскостей к поверхностям (A) и (A_3) принимают вид:

$$\omega^3 = 0 , \ \omega^3_3 = 0 . \tag{3.1}$$

Уравнение асимптических линий поверхности (A) пары Q запишется в виде:

$$\lambda_{11} (\omega^1)^2 + 2\lambda_{12}\, \omega^1 \omega^2 + \lambda_{22} (\omega^2)^2 = 0 .$$

Для пар Q^* имеем:

$$\lambda_{ii} = 0 . \tag{3.2}$$

Условия соответствия одного семейства асимптотических линий поверхностей (A), (A_3) и принадлежности точки A_1 характеристическому подпространству плоскости параболы F_1 имеют соответственно вид:

$$\Gamma^1_{32} = 0 , \tag{3.3}$$

$$\omega^2 + \omega^3_1 = 0 . \tag{3.4}$$

Присоединяя замыкание

$$(\omega^1 + \omega^1_1) \wedge \omega^2 + \omega^2_3 \wedge \omega^3_1 = 0 \tag{3.5}$$

уравнения (3.4) к системе (2.3) и учитывая (I.3), (3.I)-(3.4), получим

$$\begin{gathered} \lambda_{12} - \lambda_{21} = 0 , \\ \Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{32} = 0 , \ \ a_{ii} - \Gamma^j_{ij} = 0 , \\ a^0_{ii} = 0 , \ \ a^3_{ii} = 0 , \ \ \Gamma^2_{31} = 0 . \end{gathered} \tag{3.6}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} \lambda_{12} = \lambda_{21} = b , \\ \Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{32} = s . \end{gathered} \tag{3.7}$$

Система пфаффовых уравнений (I.3) приводится к виду:

$$\begin{gathered} \omega^3 = 0 , \ \ \omega^3_3 = 0 , \ \ \omega^3_i = b\,\omega^j , \ \ \omega^i_3 = s\,\omega^i , \\ \omega^2 + \omega^2_1 = 0 , \ \ \omega^1 + \omega^1_1 = -\Gamma^1_{21}\,\omega^2 , \\ \omega^1_2 = \Gamma^1_{2k}\,\omega^k , \ \ \frac{1}{2}\, da^0_i = a^0_{ij}\,\omega^j , \end{gathered} \tag{3.8}$$

Замыкая уравнение

$$\omega_3^i = s\omega^i,$$

получим

$$ds = 0. \qquad (3.9)$$

Следовательно,

$$s = const.$$

Осуществляя продолжение уравнений

$$\omega_i^3 = b\omega^j,$$

получим уравнение Пфаффа

$$-\frac{1}{2}d\ln b = -\omega^1 + \Gamma_{21}^1\omega^2,$$

замыкание которого дает квадратичное уравнение

$$d\Gamma_{21}^1 \wedge \omega^2 = 0. \qquad (3.10)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение

$$\omega^1 + \omega_1^1 = -\Gamma_{21}^1\omega^2$$

и учитывая (3.10), получим конечное соотношение

$$\Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{3}bs. \qquad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.10) и учитывая (3.9), находим:

$$s = 0. \qquad (3.12)$$

Из (3.11) следует, что

$$\Gamma_{21}^1 = 0 \qquad (3.13)$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений пары Q^* запишется в виде:

$$\omega^3 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_3^i = 0,\ \omega_1^i + \omega^i = 0, \qquad (3.14)$$

$$\omega_i^3 = b\omega^j,\ \omega_2^1 = \Gamma_{22}^1\omega^2,\ \frac{1}{2}da_i^0 = a_{ij}^0\omega^j,\ \frac{1}{2}d\ln b = \omega^1,$$

$$d\Gamma_{22}^1 \wedge \omega^2 - 4\Gamma_{22}^1\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$da_{12}^0 \wedge \omega^2 - 2a_{12}^0\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \qquad (3.15)$$

$$da_{21}^0 \wedge \omega^1 = 0.$$

Система (3.14), (3.15) - в инволюции и определяет пары Q^* с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Пары Q^* обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ Аффинная нормаль поверхности (A) лежит в плоскости параболы F_2, 3/ Поверхность (A) - линейчатая, 3/ Асимптотические линии на поверхностях (A) и (A_3) соответствуют, 4/ Прямолинейная конгруэнция (ℓ) образует связку параллельных прямых, 5/ Поверхность (A_1) вырождается в прямую линию, параллельную вектору $\bar{e}_3$, 6/ Вдоль координатной линии $\omega^2 = 0$ плоскость параболы F_1 стационарна, 7/ На параболе F_1 существуют только четыре фокальные точки. Точки пересечения характеристики плоскости Π_2 с параболой F_1 являются сдвоенными фокальными точками параболы F_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Аффинная нормаль поверхности (A) в точке A определяется векторным уравнением

$$\bar{h} = \bar{A} + \tau(\bar{e}_2 - b\bar{e}_3),$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

2/Рассмотрим на поверхности (A) асимптотические линии

$$\omega^2 = 0.$$

Так как

$$d\bar{e}_1 = -\omega^1\bar{e}_1 - (\bar{e}_2 - b\bar{e}_3)\omega^2,$$

то вектор касательной к линии $\omega^2=0$ не изменяет своего направления при смещении по этой линии. Следовательно, линии $\omega^2 = 0$ –прямые.

3/Уравнение асимптотических линий поверхности (A_3) в силу (3.14) приводится к виду:

$$\omega^1\omega^2 = 0.$$

4/Имеем

$$d\bar{e}_3 = 0.$$

Следовательно, все прямые ℓ конгруэнции (ℓ) -параллельны.

5/Учитывая (3.14), находим

$$dA_1 = b\omega^2\bar{e}_3,$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

6/Имеем:

$$(dx^2)_{\omega^2=0} = \omega^2_2 x^2$$

Следовательно, вдоль линий $\omega^2 = 0$ плоскость Π_2 стационарна.

7/Система уравнений для определения фокальных точек параболы F_1 пары Q^* запишется в виде:

$$(x^1)^2 - 2x^1 + a_1^0 = 0,\quad x^2 = 0,$$

$$[(x^1)^2 - (2 - a_1^0)]^2 = 0,$$

откуда непосредственно следует, что две собственные сдвоенные фокальные точки F^* и F^{**} параболы F_1 определяются формулами:

$$\bar{F}^* = \bar{A} + \bar{e}_1 + \sqrt{2 - a_1^0}\,\bar{e}_3,\quad \bar{F}^{**} = \bar{A} + \bar{e}_1 - \sqrt{2 - a_1^0}\,\bar{e}_3,$$

Литература

I.Ткач Г.П.,О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференц.геометрия многообразий фигур.",Калининград,1973, вып.3,с.143-152.

2.Ткач Г.П.,Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве."Дифференц.геометрия многообразий фигур"Труды Калининградского ун-та,1970,вып.I,с.78-85.